Т. Е. Бадокина

Мордовский государственный университет, г. Ижевск,

badokinate@gmail.com

О ДИВЕРГЕНЦИИ УДЛИНЕННОЙ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Методами теории бифуркаций и катастроф исследована задача о дивергенции тонкой гибкой удлиненной пластины на упругом основании в сверхзвуковом потоке газа сжимаемой/растягиваемой внешними краевыми усилиями вдоль оси Ox при малой нормальной нагрузке, описываемая ОДУ четвертого порядка в безразмерных переменных:

$$\chi^2\left(\frac{w''}{(1+w'^2)^{\frac{3}{2}}}\right)'' - Tw'' + \beta_0 w + \varepsilon_0 q(x) = kK(w', M, \kappa) + \\ + \theta w'' \int_0^1 [(1+w'^2)^{\frac{1}{2}} - 1]dx \quad (1)$$

с граничными условиями (B): левый край свободен, правый жестко закреплен $w''(0) = w^{(3)}(0) = 0, w(1) = w'(1) = 0$. Здесь $w = w(x)$ - прогиб пластины,

$$K(w', M, \kappa) = 1 - \left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} M w'\right]^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}$$

при одностороннем обтекании,

$$K(w', M, \kappa) = \left[1 - \frac{\kappa - 1}{2} M w'\right]^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} - \left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} M w'\right]^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}$$

при двустороннем обтекании; M - число Маха, β_0 - коэффициент жесткости основания, $\varepsilon_0 q(x)$ - малая нормальная нагрузка.

Линеаризации $Bw = \chi^2 w^{(4)}_{x^4} + \sigma w'_x + \beta_0 w = 0$ с условиями (B) отвечает характеристическое уравнение $\lambda^4 - a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, $a = T/\chi^2$, $b = \sigma/\chi^2 = 1(2)k\kappa M/\chi^2$, $c = \beta_0/\chi^2$, множитель $1(2)k\kappa M$ отвечает одностороннему/двустороннему обтеканию. Это уравнение может иметь корни четырех видов

$$1^\circ \quad \lambda_{1,2} = \gamma \pm i\delta_1, \quad \lambda_{3,4} = \gamma \pm i\delta_2, \quad \delta_1 \geqslant \delta_2;$$

$$2^\circ \quad \lambda_1 = -\alpha_1, \lambda_2 = -\alpha_2, \quad \lambda_{3,4} = \gamma \pm i\delta, \quad (\alpha_{1,2}, \gamma > 0);$$

$$3^\circ \quad \lambda_1 = \alpha_1, \quad \lambda_2 = \alpha_2, \quad \lambda_{3,4} = -\gamma \pm i\delta, \quad (\alpha_{1,2}, \gamma > 0);$$

$$4^\circ \quad \lambda_1 = -\alpha_1, \quad \lambda_2 = -\alpha_2(\alpha_1 \geqslant \alpha_2 > 0, \quad \lambda_3 = \alpha_3,$$
$$\lambda_4 = \alpha_4(\alpha_4 \geqslant \alpha_3 > 0).$$

1° Для функции прогиба

$$w(x) = e^{-\gamma x}\left[c_1\cos(\delta_1 x) + c_2\sin(\delta_1 x)\right] +$$
$$+ e^{\gamma x}\left[c_3\cos(\delta_2 x) + c_4\sin(\delta_2 x)\right]$$

определитель матрицы граничных условий имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta_B(\gamma, \delta_1, \delta_2) &= \delta_1\delta_2[(\gamma^2 + \delta_2^2)^2 e^{-2\gamma} + (\gamma^2 + \delta_1^2)^2]e^{2\gamma} + \\ &+ 2\gamma\delta_2(4\gamma^4 + \gamma^2(\delta_2^2 - \delta_1^2) - 3\delta_1^2\delta_2^2 - \delta_1^4)\sin\delta_1\cos\delta_2 + \\ &+ 2\delta_1\delta_2(7\gamma^4 - \delta_1^2\delta_2^2 + 3\gamma^2(\delta_1^2 + \delta_2^2))\cos\delta_1\cos\delta_2 + \\ &+ [(\delta_1^2 + \delta_2^2)(\gamma^2(\delta_1^2 + \delta_2^2) + 3\gamma^4 - \delta_1^2\delta_2^2) - 4\gamma^2(\gamma^4 - \delta_1^2\delta_2^2)]\sin\delta_1\sin\delta_2 + \\ &+ 2\gamma\delta_1(\gamma^2(\delta_2^2 - \delta_1^2) - 4\gamma^4 + \delta_2^2 - 3\delta_1^2\delta_2^2)\cos\delta_1\sin\delta_2.\end{aligned}$$

Существуют значения параметров, при которых Δ_B имеет противоположные знаки, следовательно, имеет место дивергенция.

2° Для функции прогиба

$$w(x) = c_1 e^{-\alpha_1 x} + c_2 e^{-\alpha_2 x} + e^{\gamma x}\left[c_3\cos(\delta x) + c_4\sin(\delta x)\right]$$

запишем определитель граничных условий

$$\Delta_B(\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \delta) = \delta\alpha_1^2\alpha_2^2(\alpha_1 - \alpha_2)e^{2\gamma} + \delta(\alpha_1 - \alpha_2)(\gamma^2 + \delta^2)^2 e^{-2\gamma} -$$
$$- \delta\alpha_2^2 \cos(\delta e^{-\alpha_1+\gamma})[(\gamma^2 + \delta^2)(2\gamma + \alpha_2) + \alpha_1(3\gamma^2 - \delta^2 + 2\gamma\alpha_2)] +$$
$$\alpha_2^2 \sin e^{-\alpha_1+\gamma}[(\gamma^2 + \delta^2)(3\gamma^2 - \delta^2 + \alpha_1\alpha_2) - 2\delta^2\alpha_1(\alpha_2 + 2\gamma)] +$$
$$+ \delta\alpha_1^2 \cos(\delta e^{-\alpha_2+\gamma})[(\gamma^2 + \delta^2)(2\gamma + \alpha_1) + \alpha_2(3\gamma^2 - \delta^2 + 2\gamma\alpha_1)] -$$
$$- \alpha_1^2 \sin(e^{-\alpha_2+\gamma})[(\gamma^2 + \delta^2)(3\gamma^2 - \delta^2 + \alpha_1\alpha_2) - 2\delta^2\alpha_2(\alpha_1 + 2\gamma)].$$

Существуют значения параметров, при которых Δ_B имеет противоположные знаки, что доказывает наличие дивергенции.

3° Из теоремы Виета получается квадратное уравнение относительно α_2 с отрицательным дискриминантом ($\alpha_2^2 - 2\gamma\alpha_2 + \gamma^2 + \delta^2 + \frac{b}{2\gamma} = 0$). Случай 3° невозможен.

4° Теорема Виета показывает, что этот случай корней возможен только при $a > 0$. Для функции прогиба $w(x) = c_1e^{-\alpha_1} + c_2e^{-\alpha_2} + c_3e^{\alpha_3} + c_4e^{\alpha_4}$ определитель матрицы граничных условий

$$\Delta_B(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \alpha_3^2\alpha_4^2(\alpha_4 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2)e^{-\alpha_1-\alpha_2} +$$
$$+ \alpha_1^2\alpha_2^2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_3)e^{\alpha_3+\alpha_4} - \alpha_2^2\alpha_4^2(\alpha_2 + \alpha_4)(\alpha_1 + \alpha_3)e^{-\alpha_1+\alpha_3} +$$
$$+ \alpha_2^2\alpha_3^2(\alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 + \alpha_4)e^{-\alpha_1+\alpha_4} + \alpha_1^2\alpha_4^2(\alpha_1 + \alpha_4)(\alpha_2 + \alpha_3)e^{-\alpha_2+\alpha_3} -$$
$$- \alpha_1^2\alpha_3^2(\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_4)e^{-\alpha_2+\alpha_4}$$

имеет противоположные знаки, следовательно, присутствует дивергенция.

И. Б. Бадриев, В. В. Бандеров, О. А. Задворнов

Казанский (Приволжский) федеральный университет,